PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO - 2010

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora.

PROPUESTA A

1º) a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo?

c) Demuestra que la función f(x) anterior y $g(x)=2x-1$ se cortan al menos en un punto.

----

a)

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

b)

La función $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ es continua en su dominio, que es R, sin embargo no le es aplicable el teorema de Bolzano a ninguno de sus intervalos finitos por ser $\frac{1}{1+x^2}>0$ para cualquier valor real de x.

$$\underline{\underline{A\ \ f(x)=\frac{1}{1+x^2}\ \ \textit{no le es aplicable el teorema de Bolzano en ningún intervalo finito}}}$$

c)

Para que las funciones $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=2x-1$ se corten en algún punto es necesario que se cumpla que f(x) = g(x).

Considerando la función $h(x)=f(x)-g(x)$, demostrar que las funciones f(x) y g(x) se cortan en algún punto es lo mismo que demostrar que h(x) se anula para algún valor real de x.

La función $h(x)=f(x)-g(x)$ es continua en R por ser la suma algebraica de dos funciones continuas en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que consideremos.

$$h(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{1+x^2}-(2x-1)=\frac{1-(2x-1)(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1-2x-2x^3+1+x^2}{1+x^2}=$$

$$=\underline{\frac{-2x^3+x^2-2x+2}{1+x^2}}=h(x).$$

Considerando, por ejemplo el intervalo [0, 2] y aplicando el teorema de Bolzano:

$$\left.\begin{array}{l} h(0)=\dfrac{2}{1}=2>0 \\ \\ h(2)=\dfrac{-2\cdot 2^3+2^2-2\cdot 2+2}{1+2^2}=\dfrac{-16+4-4+2}{1+4}=\dfrac{-14}{5}<0 \end{array}\right\}$$

Según el teorema de Bolzano, se puede afirmar que la función h(x) tiene al menos un punto de corte con el eje OX en el intervalo $(0,\ 2)$ y, como consecuencia:

$$\underline{\underline{\textit{Las funciones } f(x)=\frac{1}{1+x^2} \textit{ y } g(x)=2x-1 \textit{ se cortan al menos es un punto}}}$$

****

2º) a) Representa gráficamente las parábolas $f(x)=x^2-3x-1$ y $g(x)=-x^2+x+5$.

b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas.

----

a)

Los puntos de corte de las dos funciones son:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2-3x-1=-x^2+x+5 \;;;\; 2x^2-4x-6=0 \;;;\; x^2-2x-3=0 \;;;$$

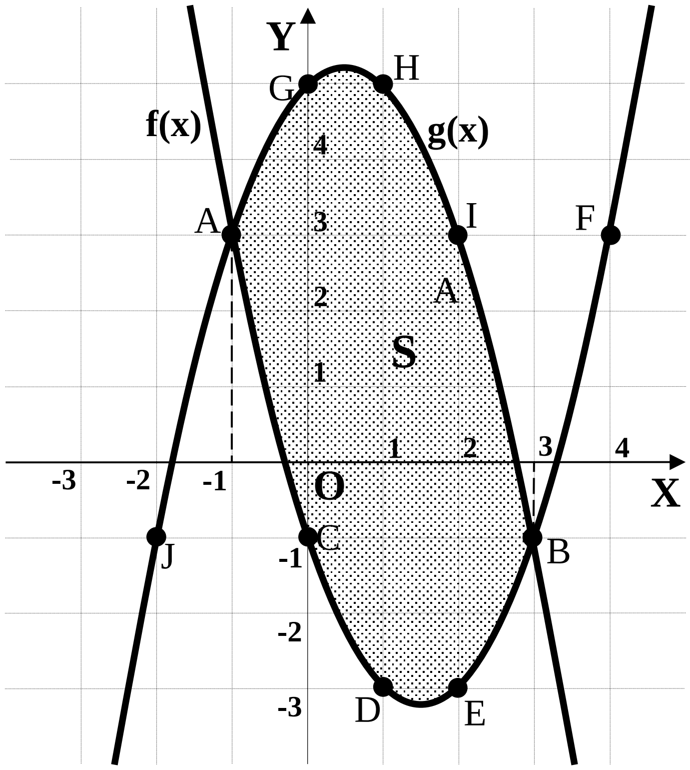
$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=1\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \rightarrow \underline{A(-1,\ 3)} \\ \\ x_2=3 \rightarrow \underline{B(3,\ -1)} \end{cases}.$$

Para facilitar la representación gráfica determinamos algunos puntos de las dos parábolas:

$$f(x)=x^2-3x-1 \Rightarrow \begin{cases} C(0,\ -1) \\ D((1,\ -3) \\ E(3,\ -1) \\ F(4,\ 3) \end{cases}$$

$$g(x)=-x^2+x+5 \Rightarrow \begin{cases} G(0,\ 5) \\ H((1,\ 5) \\ I(2,\ 3) \\ J(-2,\ -1) \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación está reflejada en la figura adjunta.



b)

Para el cálculo del área pedida tenemos en cuenta que todas las ordenadas de la función $g(x)=-x^2+x+5$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función $f(x)=x^2-3x-1$ en el intervalo $(-1,\ 3)$ que indica los límites de integración.

$$S=\int_{-1}^{3}[g(x)-f(x)]\cdot dx=\int_{-1}^{3}[(-x^2+x+5)-(x^2-3x-1)]\cdot dx=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)\cdot dx=$$

$$=\left[-\frac{2x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+6x\right]_{-1}^{3}=\left[-\frac{2x^3}{3}+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}=\left(-\frac{2\cdot 3^3}{3}+2\cdot 3^2+6\cdot 3\right)-$$

$$=-\left[-\frac{2\cdot(-1)^3}{3}+2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)\right]=-18+18+18-\left(\frac{2}{3}+2-6\right)=18-\frac{2}{3}+4=22-\frac{2}{3}=\underline{\underline{\frac{64}{3}\,u^2=S}}\cdot$$

****

3º) a) Clasifica en función del parámetro $k \in R$ el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, para k = 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \quad y \quad A' = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro k es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 + 1 + 1 - k - k - k = k^3 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow$$ Resolviendo por Ruffini:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$
1		1	2	
	1	2	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

Las soluciones son: $\underline{k_1 = 1}$ y $\underline{k_2 = -2}$.

$$Para \ \ k = 1 \ \ es \ \ A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango \ \ A' = 1}.$$

$$\underline{\underline{Para \ \ k = 1 \Rightarrow Rango \ \ A = Rango \ \ A' = 1 < nº \ \ incógnitas \Rightarrow Compatible \ \ Indeterminado}}$$

(Por ser el número de incógnitas 3 y los rango 1: 2 grados de libertad)

$$Para \ \ k = -2 \ \ es \ \ A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \ \ A' \Rightarrow \{C_1, \ C_2, \ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 2 - 2 - 4 - 4 + 2 = -18 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \ \ A' = 3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ k=-2 \Rightarrow\ Rango\ A=2\ ;;\ Rango\ A'=3\ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

b)

Para k = 1 el sistema es $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$, equivalente a $\{x+y+z=1$, que es Compatible Indeterminado y con dos grados de libertad, cuya solución es:

$$\underline{\underline{Solución:\ \left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=1-\lambda-\mu \end{array}\right\},\ \forall\lambda,\ \ \mu\in R}}$$

****

4º) a) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \notin R$, y el plano de ecuación $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$.

b) Encuentra la ecuación general de un plano π’ perpendicular a π que contenga a r.

----

a)

El vector director de la recta es $\overrightarrow{v} = (-1,\ 0,\ 1)$.

El vector normal del plano es $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 3)$.

Es evidente que los vectores $\overrightarrow{v} = (-1,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 3)$ son linealmente independientes, por ser: $\frac{-1}{2} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{1}{3}$. Tampoco son perpendiculares por ser su producto escalar distinto de cero: $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = (-1,\ 0,\ 1) \cdot (2,\ -1,\ 3) = -2 - 0 + 3 = 1 \neq 0$.

La recta r y el plano π son secantes, o sea, se cortan en un punto.

b)

Un punto de r es A(0, 0, 1).

El plano π’ tiene como vectores directores al vector normal de π, $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 3)$ y al vector director de r, $\overrightarrow{v} = (-1,\ 0,\ 1)$. Por contener a r puede determinarse por los vectores anteriores y un punto cualquiera de r, por ejemplo, A(0, 0, 1):

$$\pi'(A;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{n}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -x - 3y - (z-1) - 2y = 0\ ;;\ -x - 5y - z + 1 = 0\ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi' \equiv x + 5y + z - 1 = 0}}$$

****

PROPUESTA B

1º) La velocidad de una partícula, medida en m/seg, está determinada en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$. Se pide:

a) ¿En qué instante de tiempo del intervalo [0, 3] se alcanza la velocidad máxima?

b) Calcula $\lim_{t \to \infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido.

----

a)

La velocidad es máxima cuando se anule su derivada:

$$v'(t) = (2t+2)e^{-t} + (t^2+2t) \cdot e^{-t} \cdot (-1) = (2t+2)e^{-t} - (t^2+2t) \cdot e^{-t} = \underline{(2-t^2)e^{-t}}.$$

$$v'(t) = 0 \;\Rightarrow\; (2-t^2)e^{-t} = 0 \;;;\; 2-t^2 = 0 \;;;\; t^2 = 2 \;\Rightarrow\; \underline{t_1 = -\sqrt{2}} \;;;\; \underline{t_2 = \sqrt{2}}.$$

La solución que cumple la condición de pertenecer al intervalo [0, 3] es $t = \sqrt{2}$.

Para justificar que se trata de un máximo, para el valor encontrado, la segunda derivada tiene que ser negativa:

$$v''(t) = -2t \cdot e^{-t} + (2-t^2) \cdot e^{-t} \cdot (-1) = -2t\,e^{-t} - (2-t^2) \cdot e^{-t} = \underline{-(4+t^2)e^{-t}}.$$

$$v''(\sqrt{2}) = -(4+2) \cdot e^{-t} = \frac{-6}{e^{\sqrt{2}}} < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\text{Máximo, como queríamos justificar.}}$$

$$\underline{\underline{En\;\;el\;\;ins\tan te\;\;t = \sqrt{2}\;\;segundos\;\;se\;\;alcanza\;\;la\;\;máxima\;\;velocidad.}}$$

b)

$$\lim_{t \to \infty} [v(t)] = \lim_{t \to \infty} \left[(t^2+2t)e^{-t}\right] = \lim_{t \to \infty} \frac{t^2+2t}{e^t} = \frac{\infty}{\infty} \;\Rightarrow\; In\det. \;\Rightarrow\; \{L'Hopital\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} \frac{2t+2}{e^t} = \frac{\infty}{\infty} \;\Rightarrow\; In\det. \;\Rightarrow\; \{L'Hopital\} \;\Rightarrow\; \lim_{t \to \infty} \frac{2}{e^t} = \frac{2}{\infty} = \underline{0}.$$

La solución obtenida indica que la velocidad final de la partícula es cero, es decir, que la partícula termina parada al final del experimento.

****

2º) Calcula la integral indefinida: $I=\int \frac{\cos\ x}{1+sen^2\ x}\cdot dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable y = sen x)

$$I=\int \frac{\cos\ x}{1+sen^2\ x}\cdot dx \;\Rightarrow \left\{\begin{matrix} y=sen\ x \\ dy=\cos\ x\cdot dx \end{matrix}\right\} \Rightarrow\; I=\int \frac{dy}{1+y^2}=arc\ \ tag\ \ y+C=$$

$=\underline{arc\ tag\ (sen\ x)+C}$.

$$\underline{\underline{I=\int \frac{\cos\ x}{1+sen^2\ x}\cdot dx=arc\ tag\ (sen\ x)+C}}$$

****

3º) Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & a-3\\ b+2 & c\end{pmatrix}$. Determina los valores de a, b, c ε R de forma que se cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que A · B = B · A.

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & a-3\\ b+2 & c\end{vmatrix}=2c-(b+2)(a-3)=8\ \ ;;\ \ 2c-ab+3b-2a+6=8\ \ ;;$$

$\underline{2c-ab+3b-2a=2}$. (*)

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & a-3\\ b+2 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+b+2 & 2a-6+c\\ 0+b+2 & 0+c\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}6+b & 2a-6+c\\ b+2 & c\end{pmatrix}} \\ B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & a-3\\ b+2 & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+0 & 2+a-3\\ 2b+4+0 & b+2+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & a-1\\ 2b+4 & b+c+2\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}6+b=4\\ b+2=2b+4\end{array}\right\}\rightarrow\ \underline{b=-2} \\ 2a-6+c=a-1\ \ ;;\ \ \underline{a+c=5}\ \ (1) \\ \left.\begin{array}{l}c=b+c+2\ \ ;;\\ \end{array}\right\}\rightarrow\ \underline{b=-2}\end{array}\right\}.$$

Teniendo en cuenta el valor de b y resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (*) y (1):

$$\left.\begin{array}{l}2c-ab+3b-2a=2\\ a+c=5\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}2c+2a-6-2a=2\\ a+c=5\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}2c=8\\ a+c=5\end{array}\right\}\Rightarrow\ \underline{c=4}\ \ ;;\ \ \underline{a=1}\ .$$

<u>Solución: a = 1; b = -2 y c = 4.</u>

****

4º) Dado el plano $\pi \equiv x + z = 4$ y el punto P(1, 1, 0), se pide:

a) Encuentra la ecuación general del plano π' paralelo a π que pasa por P.

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta r perpendicular a π que pasa por P.

----

a)

El haz de planos paralelos a π tiene por ecuación general $\alpha \equiv x + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz anterior, el plano π' es el que satisface su ecuación al punto P(1, 1, 0):

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x + z + D = 0 \\ P(1,\ 1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 0 + D = 0 \ ;; \ \underline{D = -1}.$$

$$\underline{\underline{\pi' \equiv x + z - 1 = 0}}$$

b)

La recta r tiene como vector director al vector normal del plano π, que es el siguiente: $\overrightarrow{v} = (1,\ 0,\ 1)$.

La recta r, perpendicular a π y que pasa por P, dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} ,\ \forall \lambda \in R}}$$

****